Аксиомы неархимедовой прямой

Дм. Ватолин

Формулируются геометрические аксиомы, из которых доказуемо, что мощность действительной прямой больше мощности любого вполне упорядоченного множества. Из аксиом доказывается ещё одно важное равенство: $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ (Гипотеза Лузина). Рассматриваются приложения аксиом к неархимедову анализу

Пусть, сектор D есть пересечение евклидового единичного круга с прямым углом. Центр круга и вершина угла расположены в точке O. Считаем, что D совпадает со своей внутренностью как плоская фигура: int(D) = D. C – дуга, и та часть границы отмеченного круга, которая является частью границы сектора D. Дуга C содержит свои концы X и Y.

Множество HC (в каком-то смысле оно есть «гиперконтинуум») состоит из всех непрерывных линий, расположенных в области D так, что если точка P пробегает линию p из HC, длина отрезка OP равна r, а величина угла XOP равна φ, то линия однозначно задаётся непрерывной функцией f_p такой, которая определена на интервале $0 < r < 1$, и определяет значение угла $\varphi = f_p(r)$, которому разрешается лежать в интервале $0 < \varphi < \pi/2$.

Линия p из HC делит сектор D на две части, не содержащие точек линии. Эти части называются **левым** и **правым** множествами в отношении к p. Любая точка левого множества считается расположенной **левее p**, а любая правого – **правее p**, если вдоль p, как по кривому лучу смотреть по направлению из точки O на дугу C. В частности, это означает, что если $W \in D$ & $|OW| = r$ & ψ = угол XOW, то W левее p, если $\psi > \phi = f_p(r)$, и W правее p, если $\psi < \phi = f_p(r)$.

Пусть линии p и q взяты из множества HC и задаются функциями $f_p(r)$ и $f_q(r)$. Пусть, для всех достаточно больших $r < 1$ выполнено $f_p(r) < f_q(r)$. Тогда, будем писать: $p \multimap\!\!< q$ или $q >\!\!\!— p$, и говорить: **p заканчивается левее q** или **q заканчивается правее p**. Линии p и q **эквивалентны**, что обозначается как $p >\!\!—\!\!< q$, если для всех достаточно больших $r < 1$ выполнено $f_p(r) = f_q(r)$. Условие $p —\!\!< q \vee p >\!\!—\!\!< q$ обозначается как $p —\!\!\leq q$ или как $q \geq\!\!— p$. Линии, подчиняющиеся условию $p —\!\!< q \vee p >\!\!—\!\!< q \vee p >\!\!— q$ называются **сравнимыми**. Линии, не подчиняющиеся указанному условию, называются **несравнимыми**.

Из определений можно извлечь следующие свойства множества HC:

Свойство I. Пусть А и Б – конечные или счётные подмножества множества HC, и все элементы объединения множеств А и Б сравнимы между собой. Пусть, каждая линия множества А заканчивается левее каждой линии множества Б. Тогда, существует линия k, которая заканчивается правее каждой линии множества А и левее каждой линии множества Б.

Свойство II. Если А – конечное или счётное подмножество из НС, то существуют линии k и k’ такие, что k заканчивается левее каждой линии из А, k' заканчивается правее каждой линии из А.

Пользуясь свойствами I и II, в множестве НС можно строить трансфинитные вполнеупорядоченные последовательности линий.

Указанные свойства суть теоремы канонической теории, не зависящие от принятия или отрицания континуум-гипотезы. Под канонической теорией понимается теория = ZF + аксиома выбора, ограниченная фиксированной мощностью множеств.

Аксиома I (гиперконтинуума). Пусть А и Б – подмножества НС, мощность которых не превышает $\aleph_1$, все элементы объединения этих множеств сравнимы между собой, и каждая линия из А заканчивается левее каждой линии из Б. Тогда, существует линия k, которая заканчивается правее каждой линии множества А и левее каждой линии множества Б.

Аксиоме эквивалентна

Теорема 1. Пусть λ пробегает множество всех конечных и счётных ординалов, а μ пробегает или множество всех конечных и счётных ординалов, или только множество всех конечных ординалов. И пусть λ и μ нумеруют линии p_λ и q_μ в множестве НС так, что если λ, α, μ, β – ординалы, $\lambda < \alpha$ и $\mu < \beta$, то $p_\lambda \prec p_\alpha \prec q_\beta \prec q_\mu$. Тогда, существует линия k, для которой $p_\lambda \prec k \prec q_\mu$ при любых λ и μ.

Аксиома I на самом деле формулируется несколько сложнее, для любых мощностей. В данном варианте, длина трансфинитных последовательностей линий меньше или равна $\aleph_1$, что является частным случаем, которого достаточно для разрешения континуум-гипотезы (относительно аксиомы I).

В самом деле, мощность множества НС равна $2^{\aleph_0}$, так как множество линий задано непрерывными функциями, которых всего $2^{\aleph_0}$. С другой стороны, количество сечений в множестве НС не меньше чем $2^{\aleph_1}$. Каждому сечению по аксиоме I соответствует некоторая линия k из НС. Поэтому, мощность множества НС равна $2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

Аксиома II (гиперконтинуума). Пусть А – подмножество НС, мощность которого не превышает $\aleph_1$, все элементы множества А сравнимы между собой. Тогда, существует линия k, которая заканчивается правее каждой линии множества А.

Вторая аксиома, вытекает из первой, и более явно влечёт отрицание континуум-гипотезы.

Весьма просто рассуждения продолжаемы так, что в них повсеместно увеличивается длина трансфинитных последовательностей. В итоге, из расширенного аналога аксиомы I выводится:

Теорема 2. Каков бы ни был ординал α, $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_0} > \aleph_\alpha$.

Теорема 3. Мощность множества действительных чисел больше мощности любого вполне упорядоченного множества.

Теорема 4. Пусть S и S(n, m), при n, m $\in$ N, суть вполне упорядоченные множества такие, что $\forall$n S(n, m+1) $\supset$ S(n, m), и S = $\cup_m$S(n, m), и card S = card S(n, m) $\geq \aleph_0$. Тогда, существует строго возрастающая функция m* такая, что для каждой P$\in$ S, при всех достаточно больших n $\in$ N (зависящих от P), S(n, m*(n)) э P.

Верны и более сложные формулы. В частности такая формула, в которой включение и объединение понимаются по модулю - с точностью до произвольного множества счётной мощности. И в частности, если S - множество всех конечных и счётных ординалов, то для каждого достаточно большого P $\in$ S, для всех достаточно больших n $\in$ N (зависящих от P) P $\in$ S(n, m*(n)).

Для сравнимых линий, различающихся по введённому на них порядку, можно условно различать их концы. Можно считать, поэтому, что условно различающиеся концы линий образуют всюду плотное множество, точечную базу, на некой гиперпрямой [1]. Точечная база обладает свойствами I и II, выписанными выше. Отсюда, гиперпрямая может быть отождествлена с множеством трансфинитных двоичных последовательностей длины $\aleph_1$, поскольку, некая точечная база в множестве двоичных последовательностей также обладает указанными свойствами. В множестве функций от аргумента r, отождествляемых с линиями множества НС, выполнены аксиомы поля действительных чисел, кроме аксиомы Архимеда и некоторых аксиом порядка. Если применять к линиям из НС, как к функциям, алгебраические операции, то выполнение этих операций приводит к «движению» концов линий по гиперпрямой. Т.е. алгебраическим операциям над функциями из множества НС однозначно соответствуют операции над геометрическими точками гиперпрямой.

Можно считать, что гиперпрямая включает в себя действительную прямую. Достаточно близкие (в порядке на линиях) линии имеют концы на действительной прямой, которые различаются на гиперпрямой на «актуально бесконечно малую величину». Интерпретируем линии как правила построения точек на гиперпрямой. Правила определяют развёртывающиеся во времени r = t потенциальные величины, упорядоченные аналогично линиям. Результатом применения правила является точка гиперпрямой, являющаяся концом линии. В частности тогда, точка на гиперпрямой, которая считается «нулём», содержит в своей «актуально бесконечно малой окрестности» геометрические точки, соответствующие «бесконечно малым потенциальным величинам-правилам». В такой окрестности можно определить порядки малости: можно считать, что «дважды бесконечно малая величина» это такая, которая «бесконечно мала по отношению к простой бесконечно малой величине» и.т.п. Алгебраические операции над потенциально бесконечно малыми (над функциями, правилами) приводят к операциям над актуально бесконечно малыми (над точками гиперпрямой). Можно сказать, что правила образуют гиперконтинуум правил НС.

Отождествим теперь число с определяющим это число дискретным потенциальным правилом-последовательностью (как с последовательностью точек линии), или с определяющим его непрерывным правилом (с самой линией). Тогда, можно подвергнуть правила всем операциям сложения, умножения и т.п., тем же, что и в поле действительных чисел. **Бесконечно малый сдвиг**, тогда, **соответствует переопределению числа**, т.е. переходу к правилу, которое с точки зрения различимости на действительной прямой не даёт определения другого числа, но с точки зрения различимости на гиперпрямой – новое правило даёт число, отличающееся от прежнего на бесконечно малую актуальную (как предел правила) и потенциальную (как правило, которое есть разность правил) величину. Похожие неархимедовы числа и похожие аксиомы различимости рассмотрел Ревуженко. Он же дал интересные примеры чисел, не использующихся в классическом анализе, и нашёл отношения между такими числами.

Определений бесконечно малых как классов эквивалентности по простому фильтру достаточно для возникновения неархимедовой прямой, т.е. для возникновения на прямой свойств I и II с сохранением алгебраических операций. Среди неархимедовых чисел тривиально выделяема часть чисел, составляющая неархимедово поле. В результате, возможны конструктивные вычисления с бесконечно малыми, наиболее близкие к классическому анализу. Повидимому, построение неархмедовой прямой в этой работе, так и подход Ревуженко, соответствует самому естественному, классическому и прямому пониманию бесконечно малых. Этот подход не требует какого-то дополнительного – сверх классического прямого – обоснования бесконечно малых, например, через весьма неконструктивные ультрафильтры, или через совсем неконструктивные «нестандартные множества». Такое излишнее обоснование, как минимум, не даёт никаких преимуществ. С другой стороны, актуально бесконечно малые просто вводимы «геометрически», **в рамках стандартной теории множеств**, так же без надуманных «нестандартных обоснований», как бесконечно малые отрезки на гиперпрямой несчётных двоичных последовательностей.

Определение производной, при нашей интерпретации чисел, так же как и в нестандартном анализе не требует использования перехода к пределу, но весьма конструктивно. В самом деле, составляем (бесконечно малую – по критериям различимости на гиперпрямой) разность между двумя правилами образования одного и того же (по критериям различимости обычной действительной прямой) числа, и делим на бесконечно малую величину как на правило (как на функцию). Перехода к пределу не требуется, так как в результате, составлено новое правило, которое отождествляется с числом, называемым «производной». Конечно, скорее всего, потребуется выяснить, принадлежит ли последнее правило к «обычным действительным числам». В проведённой интерпретации очевидно допустимы «числа», которые не использует стандартный математический анализ, например, «числа-правила» несравнимые друг с другом.

Через отношение сравнения на линиях можно указать и абсолютный критерий интегрируемости функций, сводящийся к указанию сечения на гиперпрямой. Свойство интегрируемости функций оказывается весьма неконструктивным.